Класификација квазилинеарних парцијалних диференцијалних једначина другог реда

1. Свести на канонски облик једначину:

$$u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$$

Рјешење:

Нађимо смјену промјенљивих помоћу које ћемо дату једначину свести на канонски облик. Одговарајућа квадратна форма је:

$$t_1^2+2t_1t_2-2t_1t_3+2t_2^2+6t_3^2=K(t_1,t_2,t_3)$$

$$t_1^2+2t_1t_2-2t_1t_3+2t_2^2+6t_3^2=(t_1^2+2t_1t_2-2t_1t_3+t_2^2+t_3^2-2t_2t_3)-$$

$$-t_2^2-t_3^2+2t_2t_3+2t_2^2+6t_3^2=(t_1+t_2-t_3)^2+(t_2^2+2t_2t_3+t_3^2)+4t_3^2=$$

$$=(t_1+t_2-t_3)^2+(t_2+t_3)^2+(2t_3)^2$$

$$\tau_1=t_1+t_2-t_3$$
$$\tau_2=t_2+t_3$$
$$\tau_3=2t_3$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$t_3=\frac{\tau_3}{2}$$
$$t_2=\tau_2-\frac{\tau_3}{2}$$
$$t_1=\tau_1-\tau_2+\tau_3$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(B^{-1})^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Смјена је дата са

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -x+y\\ x-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\end{pmatrix}$$

Дакле, смјена је

$$\xi=x$$
$$\eta=-x+y$$
$$\zeta=x-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}$$

Даље је:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi - u_\eta + u_\zeta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = u_\eta - \frac{1}{2} u_\zeta$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z = \frac{1}{2} u_\xi$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\xi\zeta} \zeta_x - u_{\eta\xi} \xi_x - u_{\eta\eta} \eta_x - u_{\eta\zeta} \zeta_x + u_{\zeta\xi} \xi_x + u_{\zeta\eta} \eta_x + u_{\zeta\zeta} \zeta_x =$$

$$= u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 2u_{\xi\eta} + 2u_{\xi\zeta} - 2u_{\zeta\eta}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\zeta} \zeta_y - u_{\eta\xi} \xi_y - u_{\eta\eta} \eta_y - u_{\eta\zeta} \zeta_y + u_{\zeta\xi} \xi_y + u_{\zeta\eta} \eta_y + u_{\zeta\zeta} \zeta_y =$$

$$= -u_{\eta\eta} - \frac{1}{2} u_{\zeta\zeta} + u_{\xi\eta} - \frac{1}{2} u_{\xi\zeta} + \frac{3}{2} u_{\eta\zeta}$$

$$u_{xz} = u_{\xi\xi} \xi_z + u_{\xi\eta} \eta_z + u_{\xi\zeta} \zeta_z - u_{\eta\xi} \xi_z - u_{\eta\eta} \eta_z - u_{\eta\zeta} \zeta_z + u_{\zeta\xi} \xi_z + u_{\zeta\eta} \eta_z + u_{\zeta\zeta} \zeta_z =$$

$$= \frac{1}{2} u_{\zeta\xi} + \frac{1}{2} u_{\xi\zeta} - \frac{1}{2} u_{\eta\zeta}$$

$$u_{yy} = u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y + u_{\eta\zeta} \zeta_y - \frac{1}{2} u_{\zeta\xi} \xi_y - \frac{1}{2} u_{\zeta\eta} \eta_y - \frac{1}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_y =$$

$$= u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{\zeta\zeta} - u_{\eta\zeta}$$

$$u_{zz} = \frac{1}{2} u_{\xi\xi} \xi_z + \frac{1}{2} u_{\xi\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{\xi\zeta} \zeta_z = \frac{1}{4} u_{\xi\xi}$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - \cancel{2u_{\xi\eta}} + \cancel{2u_{\xi\zeta}} - \cancel{2u_{\zeta\eta}} - 2u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + \cancel{2u_{\xi\eta}} - \cancel{u_{\xi\zeta}} + \cancel{3u_{\eta\zeta}} - u_{\zeta\zeta} - \cancel{u_{\zeta\xi}} + \cancel{u_{\eta\zeta}} +$$

$$+ 2u_{\eta\eta} + \frac{1}{2} u_{\xi\xi} - \cancel{2u_{\eta\zeta}} + \frac{3}{2} u_{\zeta\zeta} = 0$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$$

Закључујемо да је дата парцијална диференцијална једначина елиптичког типа

Свести на канонски облик једначину:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Решење:

Одговарајућа квадратна форма је:

$$t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 = 0$$

$$t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 = (t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 - 4t_2t_3) + 4t_2t_3 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2t_3 = \ulcorner t_3 = t_2 + s \lrcorner = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2^2 + 4t_2 s + s^2 - s^2 =$$

$$= (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (2t_2 + s)^2 - s^2 = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (t_2 + t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2$$

$$\tau_1 = t_1 - 2t_2 + t_3$$
$$\tau_2 = t_2 + t_3$$
$$\tau_3 = t_2 - t_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = \frac{\tau_2}{2} + \frac{\tau_3}{2}$$
$$t_3 = \frac{\tau_2}{2} - \frac{\tau_3}{2}$$
$$t_1 = \tau_1 + \frac{\tau_2}{2} + \frac{3\tau_3}{2}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Смена је дата са $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Дакле, смена је

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$
$$\zeta = \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$$

Даље је:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi + \frac{1}{2} u_\eta + \frac{3}{2} u_\zeta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = \frac{1}{2} u_\eta + \frac{1}{2} u_\zeta$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z = \frac{1}{2} u_\eta - \frac{1}{2} u_\zeta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\xi\zeta} \zeta_x + \frac{1}{2} u_{\eta\xi} \xi_x + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_x + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta} \zeta_x + \frac{3}{2} u_{\zeta\xi} \xi_x + \frac{3}{2} u_{\zeta\eta} \eta_x + \frac{3}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_x =$$

$$= u_{\xi\xi} + \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{9}{4} u_{\zeta\zeta} + u_{\xi\eta} + 3 u_{\xi\zeta} + \frac{3}{2} u_{\eta\zeta}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\zeta} \zeta_y + \frac{1}{2} u_{\eta\xi} \xi_y + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta} \zeta_y + \frac{3}{2} u_{\zeta\xi} \xi_y + \frac{3}{2} u_{\zeta\eta} \eta_y + \frac{3}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_y =$$

$$= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{3}{4} u_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1}{2} u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\eta}$$

$$u_{xz} = u_{\xi\xi} \xi_z + u_{\xi\eta} \eta_z + u_{\xi\zeta} \zeta_z + \frac{1}{2} u_{\eta\xi} \xi_z + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta} \zeta_z + \frac{3}{2} u_{\zeta\xi} \xi_z + \frac{3}{2} u_{\zeta\eta} \eta_z + \frac{3}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_z =$$

$$= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} - \frac{3}{4} u_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2} u_{\xi\eta} - \frac{1}{2} u_{\xi\zeta} + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{2} u_{\eta\xi} \xi_y + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta} \zeta_y + \frac{1}{2} u_{\zeta\xi} \xi_y + \frac{1}{2} u_{\zeta\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_y =$$

$$= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta}$$

$$u_{zz} = \frac{1}{2} u_{\eta\xi} \xi_z + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{\eta\zeta} \zeta_z - \frac{1}{2} u_{\zeta\xi} \xi_z - \frac{1}{2} u_{\zeta\eta} \eta_z - \frac{1}{2} u_{\zeta\zeta} \zeta_z =$$

$$= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2} u_{\eta\zeta}$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$\underline{u_{\xi\xi}} + \underline{\frac{1}{4} u_{\eta\eta}} + \underline{\underline{\frac{9}{4} u_{\zeta\zeta}}} + \cancel{u_{\xi\eta}} + \cancel{3u_{\xi\zeta}} + \cancel{\frac{3}{2} u_{\eta\zeta}} - \underline{u_{\eta\eta}} - \underline{\underline{3u_{\zeta\zeta}}} - \cancel{2u_{\xi\eta}} - \cancel{2u_{\xi\zeta}} - \cancel{4u_{\zeta\eta}} +$$

$$+ \underline{\frac{1}{2} u_{\eta\eta}} - \underline{\underline{\frac{3}{2} u_{\zeta\zeta}}} + \cancel{u_{\xi\eta}} - \cancel{u_{\xi\zeta}} + \cancel{u_{\eta\zeta}} + \underline{u_{\eta\eta}} + \underline{\underline{u_{\zeta\zeta}}} + \cancel{2u_{\eta\zeta}} + \underline{\frac{1}{4} u_{\eta\eta}} + \underline{\underline{\frac{1}{4} u_{\zeta\zeta}}} - \cancel{\frac{1}{2} u_{\eta\zeta}} = 0$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0$$

Закључујемо да је дата парцијална диференцијална једначина хиперболичког типа.

Парцијалне диференцијалне једначине

1. Свести на канонски облик једначину:

$$3u_{yy}-2u_{xy}-2u_{yz}+4u=0$$

Рјешење:

Одговарајућа квадратна форма је:

$$K(t_1,t_2,t_3)=3t_2^2-2t_1t_2-2t_1t_3$$

$$3t_2^2-2t_1t_2-2t_1t_3=\left(3t_2^2-2t_1t_2-2t_1t_3+\frac{t_1^2}{3}+\frac{t_3^2}{3}+\frac{2}{3}t_1t_3\right)-\frac{t_1^2}{3}-\frac{t_3^2}{3}-\frac{2}{3}t_1t_3=$$

$$=\left(-\frac{t_1}{\sqrt3}+\sqrt3 t_2-\frac{t_3}{\sqrt3}\right)^2-\left(\frac{t_1}{\sqrt3}+\frac{t_3}{\sqrt3}\right)^2$$

$$\tau_1=-\frac{t_1}{\sqrt3}+\sqrt3 t_2-\frac{t_3}{\sqrt3}$$

$$\tau_2=\frac{t_1}{\sqrt3}+\frac{t_3}{\sqrt3}$$

$$t_1=\sqrt3\tau_2-t_3$$

$$t_2=\frac{\tau_1+\tau_2}{\sqrt3}$$

Добили смо систем од двије једначине са три непознате, који је сагласан и неодређен. Пошто нама треба сагласан и одређен систем (како би смјена била регуларна, односно матрица B инвертибилна), узећемо $\tau_3=\frac{t_3}{\sqrt3}$, односно $t_3=\sqrt3\tau_3$

Дакле,

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & \sqrt3 & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt3 & -\sqrt3\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt3\end{pmatrix}$$

Смјена је дата са $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(B^{-1})^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt3} & 0\\ \sqrt3 & \frac{1}{\sqrt3} & 0\\ -\sqrt3 & 0 & \sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}x + \frac{y}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

Дакле, смјене су:

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{3}}$$
$$\eta = \sqrt{3}x + \frac{y}{\sqrt{3}}$$
$$\zeta = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}t$$

Даље је:

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = \frac{1}{\sqrt{3}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{3}} u_\eta$$

$$u_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\xi} \xi_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\eta} \eta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\zeta} \zeta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\xi} \xi_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_x =$$
$$= u_{\eta\eta} - u_{\xi\zeta} + u_{\xi\eta} - u_{\eta\zeta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\xi} \xi_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\eta} \eta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\zeta} \zeta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\xi} \xi_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_y =$$
$$= \frac{1}{3} u_{\xi\xi} + \frac{1}{3} u_{\eta\eta} + \frac{2}{3} u_{\xi\eta}$$

$$u_{yt} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\xi} \xi_t + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\eta} \eta_t + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\xi\zeta} \zeta_t + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\xi} \xi_t + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_t + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_t =$$
$$= u_{\xi\zeta} + u_{\eta\zeta}$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cancel{2u_{\xi\eta}} - 2u_{\eta\eta} + \cancel{2u_{\xi\zeta}} - \cancel{2u_{\xi\eta}} + \cancel{2u_{\eta\zeta}} - \cancel{2u_{\xi\zeta}} - \cancel{2u_{\eta\zeta}} + 4u = 0$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 4u = 0$$

Закључујемо да је дата парцијална диференцијална једначина параболичког типа.

Свести на канонски облик једначину:

$u_{xx}+4u_{yy}+u_{zz}+4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$

Решење:

Одговарајућа квадратна форма је:

$K(t_1,t_2,t_3)=t_1^2+4t_2^2+t_3^2+4t_1t_2+2t_1t_3+4t_2t_3$

$t_1^2+4t_2^2+t_3^2+4t_1t_2+2t_1t_3+4t_2t_3=(t_1+2t_2+t_3)^2$

$\tau_1=t_1+2t_2+t_3$

$t_1=\tau_1-2t_2-t_3$

Добили смо систем од једне једначине са три непознате, који је сагласан и неодређен. Пошто нама треба сагласан и одређен систем (како би смена била регуларна, односно матрица B инвертибилна), узећемо $\tau_2=t_2$ и $\tau_3=t_3$.

Дакле,

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Смена је дата са $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(B^{-1})^T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -2x+y\\ -x+z\end{pmatrix}$$

Дакле, смена је:

$\xi=x$

$\eta=-2x+y$

$\zeta=-x+z$

Даље је:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi - 2u_\eta + u_\zeta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y = u_\eta$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z = u_\zeta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\xi\zeta} \zeta_x - 2u_{\eta\xi} \xi_x - 2u_{\eta\eta} \eta_x - 2u_{\eta\zeta} \zeta_x - u_{\zeta\xi} \xi_x - u_{\zeta\eta} \eta_x - u_{\zeta\zeta} \zeta_x =$$

$$= u_{\xi\xi} + 4u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 4u_{\xi\eta} - 2u_{\xi\zeta} + 4u_{\eta\zeta}$$

$$u_{xy} = u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x + u_{\eta\zeta} \zeta_x = u_{\eta\xi} - 2u_{\eta\eta} - u_{\eta\zeta}$$

$$u_{xz} = u_{\zeta\xi} \xi_x + u_{\zeta\eta} \eta_x + u_{\zeta\zeta} \zeta_x = u_{\zeta\xi} - 2u_{\zeta\eta} - u_{\zeta\zeta}$$

$$u_{yy} = u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y + u_{\eta\zeta} \zeta_y = u_{\eta\eta}$$

$$u_{yz} = u_{\eta\xi} \xi_z + u_{\eta\eta} \eta_z + u_{\eta\zeta} \zeta_z = u_{\eta\zeta}$$

$$u_{zz} = u_{\zeta\xi} \xi_z + u_{\zeta\eta} \eta_z + u_{\zeta\zeta} \zeta_z = u_{\zeta\zeta}$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо:

$$u_{\xi\xi} + \cancel{4u_{\eta\eta}} + \cancel{u_{\zeta\zeta}} - \cancel{4u_{\xi\eta}} - \cancel{2u_{\xi\zeta}} + \cancel{4u_{\eta\zeta}} + \cancel{4u_{\eta\eta}} + \cancel{u_{\zeta\zeta}} + \cancel{4u_{\xi\eta}} - \cancel{8u_{\eta\eta}} - \cancel{4u_{\eta\zeta}} +$$

$$+ \cancel{2u_{\xi\zeta}} - \cancel{4u_{\zeta\eta}} - \cancel{2u_{\zeta\zeta}} + \cancel{4u_{\eta\zeta}} + 2u = 0$$

$$u_{\xi\xi} + 2u = 0$$

Закључујемо да је дата парцијална диференцијална једначина ултрапараболичког типа.

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)u+f(x,y)$$

Сменом

$$\xi=\xi(x,y)$$
$$\eta=\eta(x,y)$$

таквом да је $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$ (услов регуларности смене) једначина се своди на канонски облик.

Смену добијамо као решење једначине

$$a(x,y)(dy)^2-2b(x,y)\,dx\,dy+c(x,y)(dx)^2=0$$

односно

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b(x,y)\frac{dy}{dx}+c(x,y)=0$$

Означимо $\frac{dy}{dx}=t$, добијамо

$$a(x,y)t^2-2b(x,y)t+c(x,y)=0$$

па је

$$t_{1,2}=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$$
$$t_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

Дискриминанта је $\Delta=b^2-ac$.

I $\Delta>0 \Rightarrow$ једначина је хиперболичког типа

$$t_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\quad,\quad\frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

Решавањем добијене једначине добијамо смену

$$\xi=\varphi(x,y)\quad,\quad\eta=\psi(x,y)$$

којом се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Смјеном $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ се добијена једначина може свести на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = F\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

II $\Delta = 0 \Rightarrow$ једначина је параболичког типа

$$t = \frac{b}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Рјешавајући добијену једначину добијамо смјену

$$\xi = \varphi(x,y)$$

За $\eta = \psi(x,y)$ можемо изабрати произвољну функцију ψ такву да је смјена регуларна, т.ј. да је

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$$

Овом смјеном се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

III $\Delta < 0 \Rightarrow$ једначина је елиптичког типа

$$t = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

Рјешавањем добијене једначине добијамо

$$\alpha(x,y) = \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y) = c$$

па за смјену бирамо $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$.

Овом смјеном се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Наћи опште рјешење једначине:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

Рјешење:

$$\left.\begin{array}{l} a = x^2 \\ b = 0 \\ c = -y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - ac = -x^2y^2$$

I За $x=0$ или $y=0$ је $\Delta = 0$, па је једначина параболичког типа

II за $x \neq 0$ и $y \neq 0$ је $\Delta < 0$, па је једначина хиперболичког типа

I a) $x = 0$

Једначина постаје

$-y^2 u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{yy} = 0 \Rightarrow u_y = c(x) \Rightarrow u = c(x)\cdot y + f(x)$, гдје су $c, f \in C^2(\mathbb{R})$

б) $y = 0$

Једначина постаје

$x^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = c(y) \Rightarrow u = c(y)x + f(x)$, гдје су $c, f \in C^2(\mathbb{R})$

II $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

a) $x > 0$, $y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \frac{y}{x} \qquad \wedge \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dy} = \frac{dx}{x} \qquad\qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c \qquad\qquad \ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$\ln\frac{y}{x} = c \qquad\qquad \ln xy = c$$

$$\frac{y}{x} = c = \xi \qquad\qquad xy = c = \eta$$

$\xi_x = -\dfrac{y}{x^2}$ $\qquad \xi_y = \dfrac{1}{x}$

$\eta_x = y$ $\qquad \eta_y = x$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} \neq 0$$ за $x>0, y>0 \Rightarrow$ Смјена је регулар

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\dfrac{y}{x^2} u_\xi + y u_\eta$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \dfrac{1}{x} u_\xi + x u_\eta$

$u_{xx} = \dfrac{2y}{x^3} u_\xi - \dfrac{y}{x^2}\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right) + y\left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) =$

$= \dfrac{2y}{x^3} u_\xi + \dfrac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} - \dfrac{2y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = \dfrac{1}{x}\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\right) + x\left(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) = \dfrac{1}{x^2} u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta}$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо

$$\frac{2y}{x} u_\xi + \cancel{\frac{y^2}{x^2} u_{\xi\xi}} - 2y^2 u_{\xi\eta} + \cancel{x^2 y^2 u_{\eta\eta}} - \cancel{\frac{y^2}{x^2} u_{\xi\xi}} - 2y^2 u_{\xi\eta} - \cancel{x^2 y^2 u_{\eta\eta}} = 0$$

$$-4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\xi = 0$$

Искористи ћемо $y^2 = yx \cdot \dfrac{y}{x} = \xi\eta$

Добијамо

$$-4\xi\eta\, u_{\xi\eta} + 2\xi u_\xi = 0 \quad / \cdot \frac{-1}{2\xi}$$

$$2\eta\, u_{\xi\eta} - u_\xi = 0$$

Нека је $u_\xi(\xi,\eta) = \vartheta(\eta)$

Једначина постаје

$$2\eta\, \vartheta' - \vartheta = 0$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{d\eta}{2\eta}$$

$$\ln|\vartheta| = \frac{1}{2}\ln|\eta| + c$$

$$\vartheta = c\sqrt{\eta}$$

$u_\xi(\xi,\eta) = c(\xi)\sqrt{\eta}$

$u = c_1(\xi)\sqrt{\eta} + c_2(\eta)$, где је $c_1(\xi) = \int c(\xi)\,d\xi$, и $c_1 \in C^1(\mathbb{R}), c_2 \in C(\mathbb{R})$

>0, $y<0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x} = \frac{-y}{x} \quad \land \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \frac{y}{x}$$

Одавде добијамо $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$, па се једначина своди на случај а)

в) $x<0$, $y>0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \frac{-y}{x} \quad \land \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \frac{y}{x}$$

Одавде добијамо $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$, па се једначина своди на случај а).

г) $x<0$, $y<0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \frac{y}{x} \quad \land \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Одавде добијамо $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$, па се једначина своди на случај а).